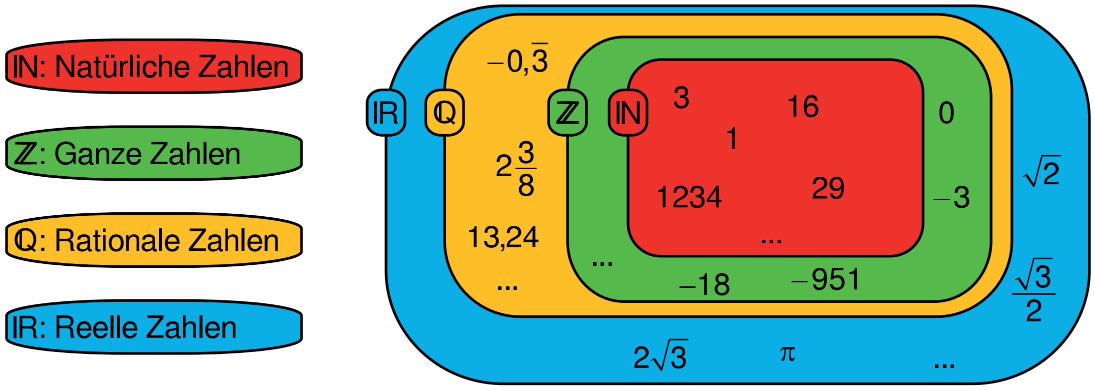
Grundlegende Inhalte Mathematik, Realschule, Jahrgangsstufe 9 (II/III)

Inhaltsverzeichnis

Stand: 28.06.2022

Reelle Zahlen

1 Zahlenmengen



2 Definition der Wurzel bzw. Quadratwurzel

$\sqrt{a}$ ist eine nichtnegative, reelle Lösung der Gleichung $x^2 = a$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$.

Beispiel: $\sqrt{16} = 4$ ist eine Lösung der Gleichung $x^2 = 16$.

Für die Quadratwurzel $\left(\sqrt[2]{a} \text{ oder } \sqrt{a}\right)$ gilt:

allgemein	**Beispiel**
$\sqrt{a}$; $a \in \mathbb{R}_0^+$	$\sqrt{2}$
$\sqrt{a}$ ist eine positive reelle Zahl, für die gilt: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}^2 = a$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$	$\sqrt{2}$ ist eine positive reelle Zahl, für die gilt: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}^2 = 2$
Man spricht: „(Quadrat-)Wurzel aus a“.	Man spricht: „(Quadrat-)Wurzel aus 2“.

Für die Lösung der Gleichung $x^2 = a$ $(G = \mathbb{R})$ gilt: $x = \sqrt{a}$ oder $x = -\sqrt{a}$ $\left(a \in \mathbb{R}_0^+\right)$.

Beispiele:

a) $x^2 = 9$ $\qquad G = \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ $x = \sqrt{9} = 3$ oder $x = -\sqrt{9} = -3$ $\qquad L = \{-3; 3\}$

b) $x^2 = 6$ $\qquad G = \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ $x = \sqrt{6}$ oder $x = -\sqrt{6}$ $\qquad L = \{-\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$

3 Rechnen mit Quadratwurzeln

Alle Rechengesetze und Regeln, die für rationale Zahlen gelten, behalten ihre Gültigkeit!

allgemein	Beispiel
Für $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ gilt:	
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{3 \cdot 7} = \sqrt{21}$
$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ $(b > 0)$	$\sqrt{32} : \sqrt{8} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{32}{8}} = \sqrt{4} = 2$
$\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}$	$\left(\sqrt{2}\right)^3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$
Vorsicht: $\sqrt{a^2} = \sqrt{\lvert a \rvert^2} = \lvert a \rvert$ für $a \in \mathbb{R}$	Vorsicht: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{\lvert -3 \rvert^2} = \lvert -3 \rvert = 3$

Anwendung: Teilweises Radizieren

a) $\sqrt{175} = \sqrt{25 \cdot 7} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{7} = 5\sqrt{7}$

b) $\sqrt{72a^3} = \sqrt{2 \cdot 36 \cdot a^2 \cdot a} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{2} \cdot 6 \cdot a \cdot \sqrt{a} = 6a\sqrt{2a}$ $\left(a \in \mathbb{R}_0^+\right)$

Zentrische Streckung

1 Die zentrische Streckung und ihre Eigenschaften

Eigenschaften: $P \xmapsto{Z;k} P'$ Streckungszentrum Z; Streckungsfaktor k $(k \neq 0)$

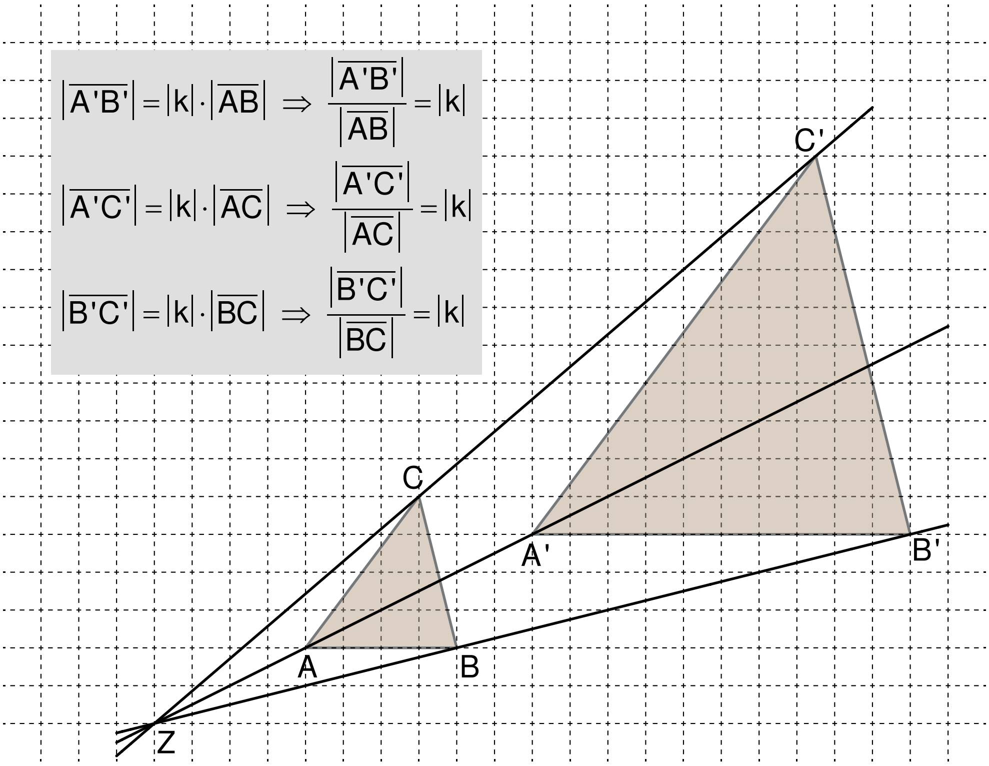
- $P' \in ZP$ und $|\overline{ZP'}| = |k| \cdot |\overline{ZP}|$
- Die zentrische Streckung ist umkehrbar.
- Sie ist geraden-, kreis-, winkel- und verhältnistreu.
- Ur- und zugehörige Bildstrecken sind parallel. Dies gilt entsprechend für Ur- und zugehörige Bildgeraden.
- Das Streckungszentrum ist der einzige Fixpunkt. Alle Geraden, die durch das Streckungszentrum verlaufen, sind Fixgeraden.
- Die zentrische Streckung ist im Allgemeinen **keine** Kongruenzabbildung.

Beispiel: $\Delta ABC \xmapsto{Z;k=2,5} \Delta A'B'C'$

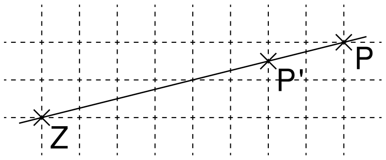
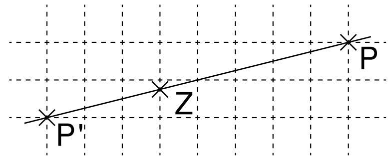
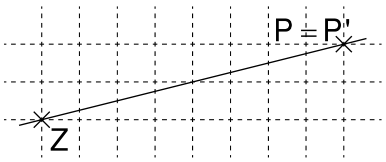
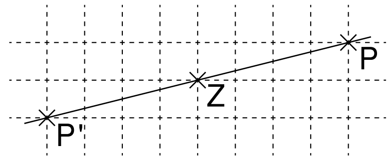
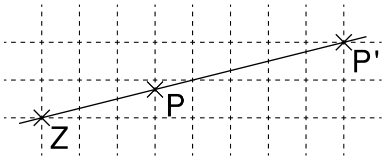
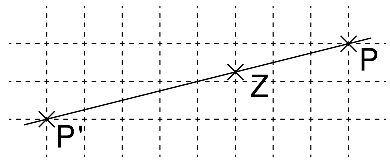
$$|\overline{A'B'}| = |k| \cdot |\overline{AB}| \Rightarrow \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = |k|$$

$$|\overline{A'C'}| = |k| \cdot |\overline{AC}| \Rightarrow \frac{|\overline{A'C'}|}{|\overline{AC}|} = |k|$$

$$|\overline{B'C'}| = |k| \cdot |\overline{BC}| \Rightarrow \frac{|\overline{B'C'}|}{|\overline{BC}|} = |k|$$



Der Wert des Streckungsfaktors beeinflusst die Lage des Bildpunktes:

Streckungsfaktor k / Betrag des Streckungsfaktors k	ist positiv *Z liegt nicht zwischen P und P‘*	ist negativ *Z liegt zwischen P und P‘*
ist kleiner als 1 $\lvert\overline{ZP'}\rvert < \lvert\overline{ZP}\rvert$	 mögliche Werte für k: $0{,}5\,;\frac{2}{5}\,;\ldots$	 mögliche Werte für k: $-0{,}5\,;-\frac{2}{5}\,;\ldots$
ist gleich 1 $\lvert\overline{ZP'}\rvert = \lvert\overline{ZP}\rvert$	 $k = 1$	 $k = -1$
ist größer als 1 $\lvert\overline{ZP'}\rvert > \lvert\overline{ZP}\rvert$	 mögliche Werte für k: $1{,}5\,;3\,;\ldots$	 mögliche Werte für k: $-1{,}5\,;-3\,;\ldots$

Für den **Flächeninhalt** zentrisch gestreckter Bildfiguren gilt:

Wenn Figur F $\xmapsto{Z;k}$ Figur F', dann gilt: $A_{F'} = k^2 \cdot A_F$.

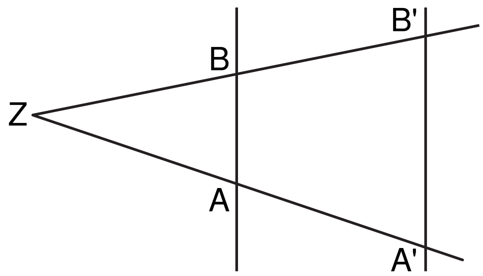
Beispiel: Dreieck ABC mit $A_{\Delta ABC} = 4\,\text{cm}^2$ und $\Delta ABC \xmapsto{Z;k=3} \Delta A'B'C'$

$\Rightarrow \quad A_{\Delta A'B'C'} = 3^2 \cdot 4\,\text{cm}^2 = 36\,\text{cm}^2$

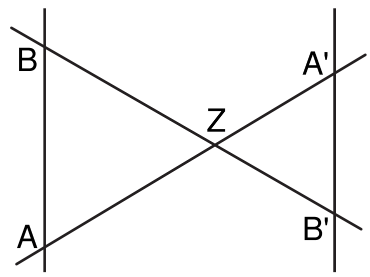
2 Strahlensätze

$$\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{ZA'}|}=\frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{ZB'}|}$$

$$\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{ZA'}|}=\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{A'B'}|}$$



AB || A'B'

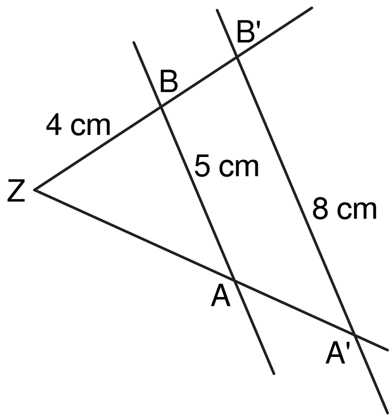


Beispiele:

a)

$$\frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}=\frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\overline{ZB'}|}{4\text{ cm}}=\frac{8\text{ cm}}{5\text{ cm}}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overline{ZB'}|=6{,}4\text{ cm}$$

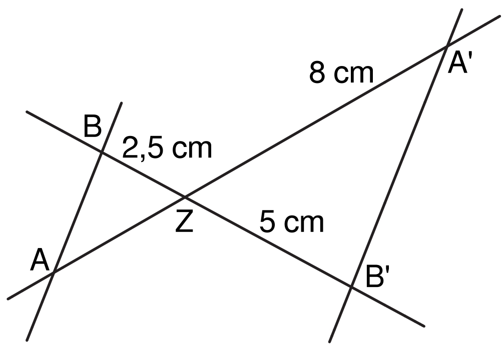


AB || A'B'

b)

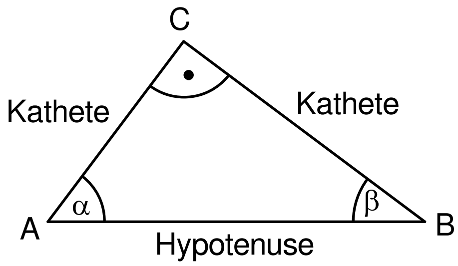
$$\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{ZA'}|}=\frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{ZB'}|} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\overline{ZA}|}{8\text{ cm}}=\frac{2{,}5\text{ cm}}{5\text{ cm}}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overline{ZA}|=4\text{ cm}$$



AB || A'B'

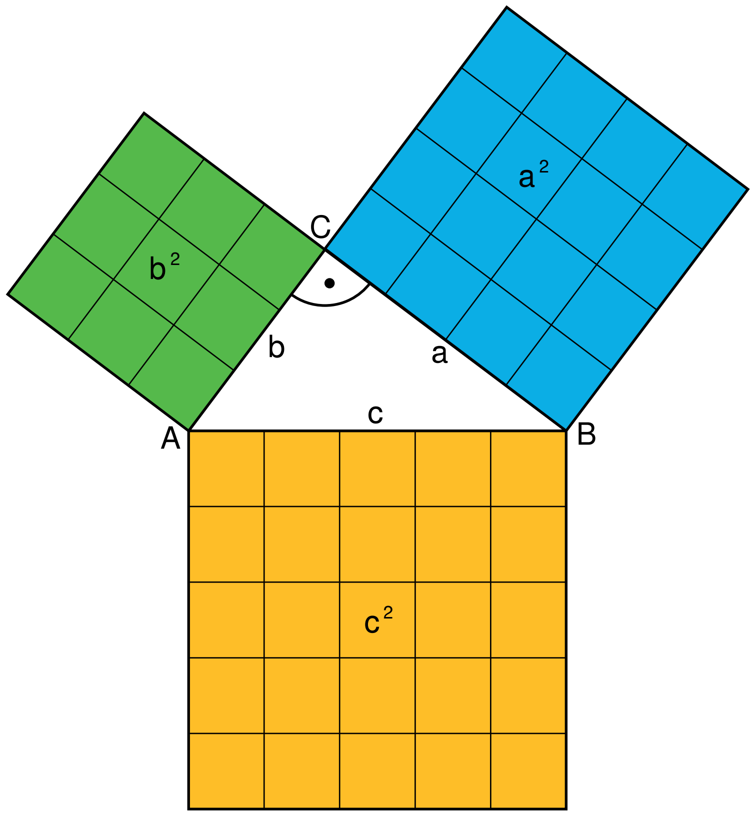
Rechtwinklige Dreiecke



1 Satz des Pythagoras

Ist ein Dreieck ABC rechtwinklig bei C, dann gilt: $c^2 = a^2 + b^2$.

Umkehrung:
Gilt in einem Dreieck ABC $c^2 = a^2 + b^2$, so ist das Dreieck rechtwinklig bei C.



Beispiele:

a) Im rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Längen der Katheten: $a = 4\text{ cm}$ und $b = 3\text{ cm}$.

Für die Länge der Hypotenuse gilt: $c^2 = (4\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2$

$$= 16\text{ cm}^2 + 9\text{ cm}^2$$

$$= 25\text{ cm}^2 \qquad \Rightarrow \quad c = 5\text{ cm}$$

b) Das Dreieck DEF hat die Seitenlängen $\left|\overline{DE}\right| = 5\text{ cm}$, $\left|\overline{EF}\right| = 12\text{ cm}$ und $\left|\overline{DF}\right| = 13\text{ cm}$.

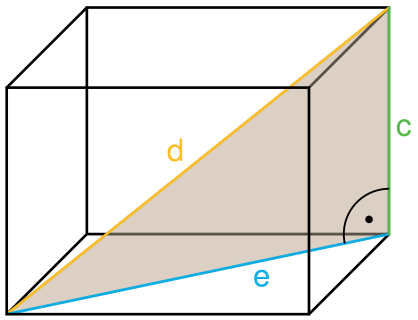
$$\left|\overline{DE}\right|^2 + \left|\overline{EF}\right|^2 = 25\text{ cm}^2 + 144\text{ cm}^2$$

$$= 169\text{ cm}^2$$

$$= (13\text{ cm})^2$$

$$= \left|\overline{DF}\right|^2$$

$\Rightarrow$ Das ΔDEF ist rechtwinklig mit der Hypotenuse $\overline{DF}$.

c) 

Im Quader gilt: $e = 5\text{ cm}$ und $c = 3\text{ cm}$.

$$d^2 = e^2 + c^2$$

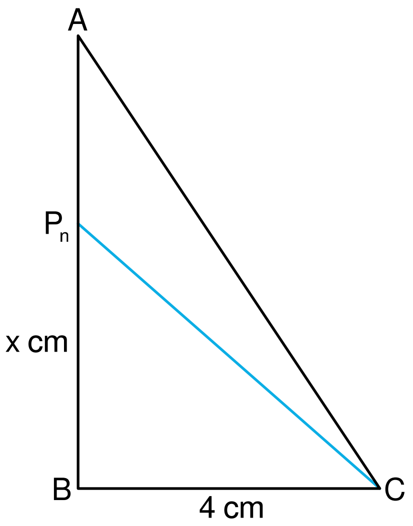
$$= (5\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2$$

$$= 34\text{ cm}^2$$

$\Rightarrow \quad d = 5{,}83\text{ cm}$

(d ist die Länge der Raumdiagonale des Quaders.)

d) Funktionale Abhängigkeit bei Strecken



Gegeben: $\left|\overline{BC}\right| = 4\text{ cm}$; $\left|\overline{BP_n}\right|(x) = x\text{ cm}$ $\left(x \in \mathbb{R}^+\right)$

$$\left|\overline{CP_n}\right|^2 = \left|\overline{BC}\right|^2 + \left|\overline{BP_n}\right|^2$$

$$\Rightarrow \quad \left|\overline{CP_n}\right|(x) = \sqrt{4^2 + x^2}\text{ cm}$$

$$= \sqrt{16 + x^2}\text{ cm}$$

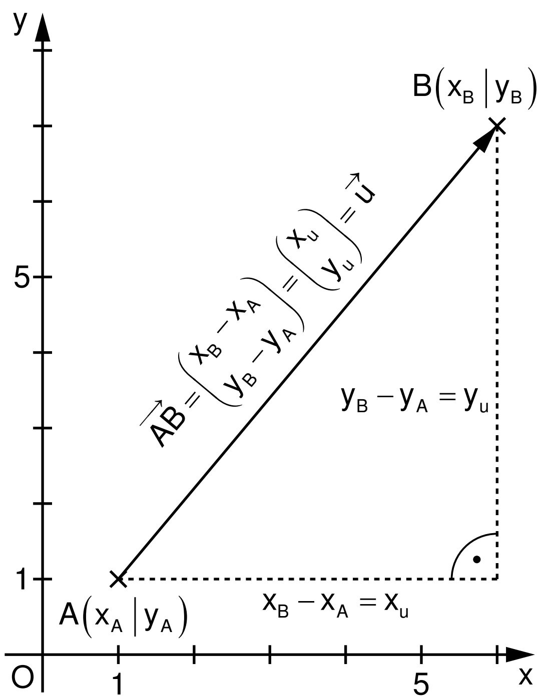
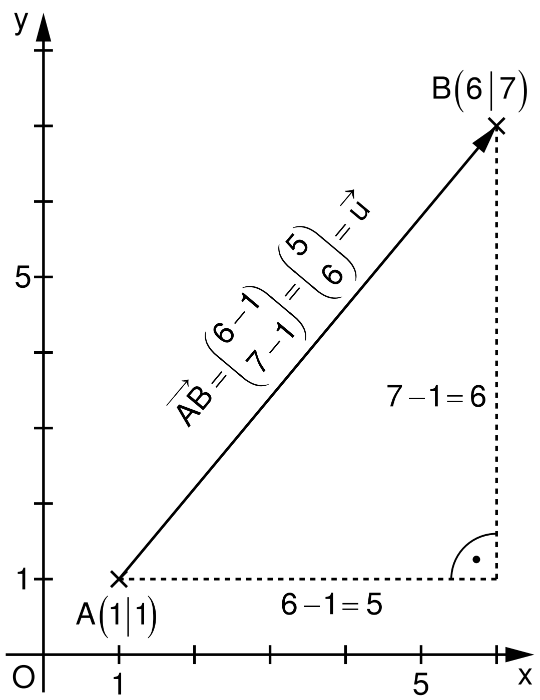
z. B. gilt für die Stecke $\overline{CP_1}$ mit $x = 3$:

$$\left|\overline{CP_1}\right| = \sqrt{16 + 3^2}\text{ cm}$$

$$= \sqrt{25}\text{ cm}$$

$$= 5\text{ cm}$$

Im Koordinatensystem werden mithilfe des Satzes des Pythagoras Längen von Strecken bzw. die Beträge von Vektoren bestimmt:

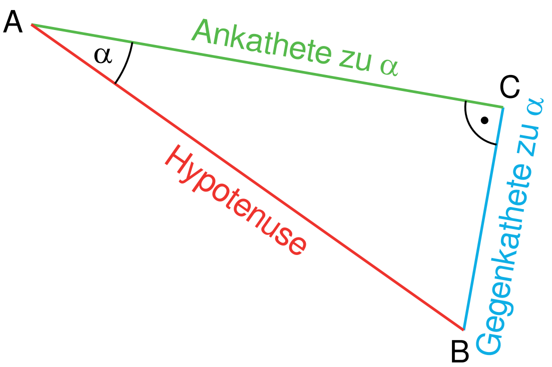
allgemein	**Beispiel**
 	
Länge der Strecke $\overline{AB}$: $\lvert\overline{AB}\rvert = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ LE Betrag des Pfeils $\overrightarrow{AB}$ bzw. des Vektors $\vec{u}$: $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$	Länge der Strecke $\overline{AB}$: $\lvert\overline{AB}\rvert = \sqrt{(6-1)^2 + (7-1)^2}$ LE $= \sqrt{5^2 + 6^2}$ LE $= \sqrt{61}$ LE Betrag des Pfeils $\overrightarrow{AB}$ bzw. des Vektors $\vec{u}$: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{u}$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$

2 Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck

$$\sin\alpha = \frac{\text{Länge der Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Länge der Ankathete zu } \alpha}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

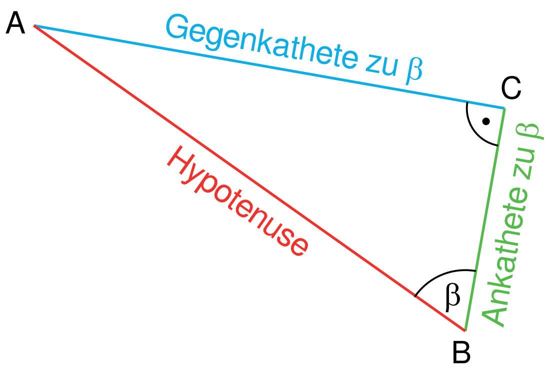
$$\tan\alpha = \frac{\text{Länge der Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Länge der Ankathete zu } \alpha}$$



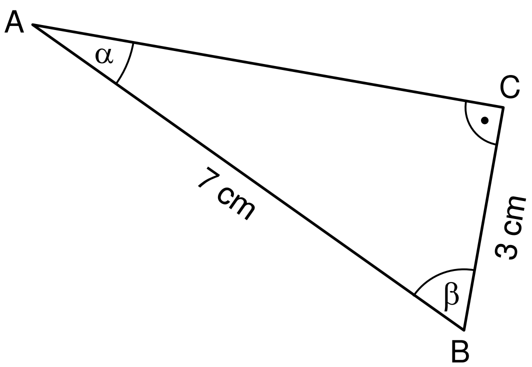
$$\sin\beta = \frac{\text{Länge der Gegenkathete zu } \beta}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

$$\cos\beta = \frac{\text{Länge der Ankathete zu } \beta}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

$$\tan\beta = \frac{\text{Länge der Gegenkathete zu } \beta}{\text{Länge der Ankathete zu } \beta}$$



Beispiel:



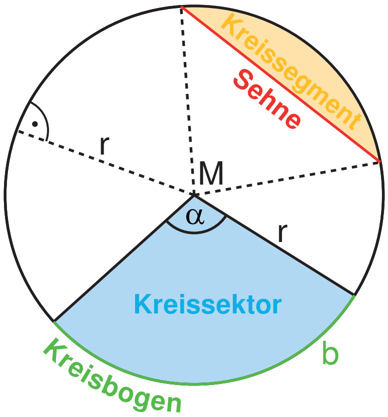
(1) $\sin\alpha = \frac{3\text{ cm}}{7\text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 25{,}38°$

(2) $\beta = 180° - 90° - 25{,}38° = 64{,}62°$

oder

$\cos\beta = \frac{3\text{ cm}}{7\text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad \beta = 64{,}62°$

Kreis und Kreisteile



Im Kreis sind der Umfang (u) und der Durchmesser (d) bzw. der Flächeninhalt (A) und das Quadrat des Radius (r^2) direkt proportional zueinander.

Der Proportionalitätsfaktor ist jeweils die Kreiszahl π (sprich: Pi).

Es gilt: $\frac{u}{d} = \pi$ bzw. $u = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi$

$\frac{A}{r^2} = \pi$ bzw. $A = r^2 \cdot \pi$

Näherungen für die Kreiszahl: $\pi \approx 3{,}14$ bzw. $\pi \approx \frac{22}{7}$

Für den Flächeninhalt A_{Sektor} eines Kreissektors bzw. für die Bogenlänge b eines Kreisbogens mit dem Mittelpunktswinkel α gilt:

$$A_{Sektor} = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi$$

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi$$

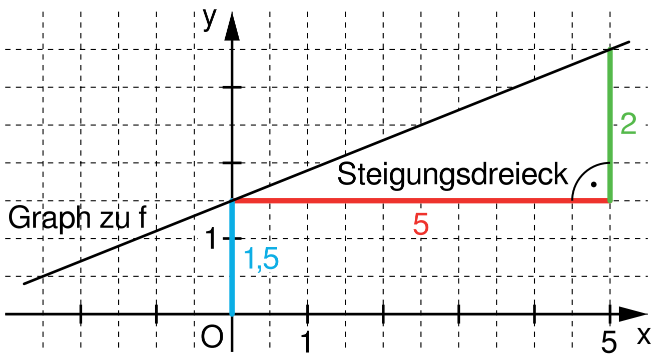
Lineare Funktionen

Eine Funktion f mit einer Gleichung der Form $y = m \cdot x + t \ (m,t,x,y \in \mathbb{Q})$ ist eine lineare Funktion. Der Graph ist eine Gerade.

Dabei ist m die Steigung und t der y-Achsenabschnitt.

Beispiel:

$$f: y = \underbrace{\frac{2}{5}}_{\text{Steigung}} \cdot x + 1{,}5 \ (x,y \in \mathbb{Q})$$

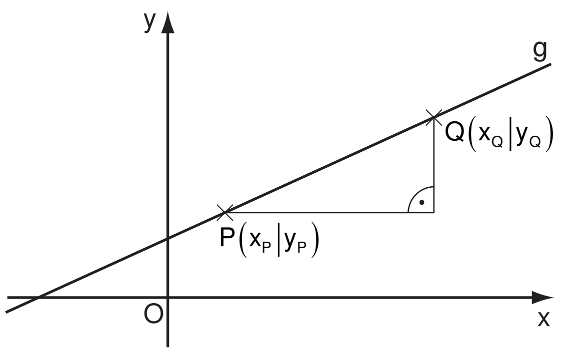


1 Steigung

Berechnung von m aus Punktkoordinaten

$P(x_P \mid y_P)$ und $Q(x_Q \mid y_Q)$; $P,Q \in g$

Steigung: $m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$



Steigung paralleler und orthogonaler Geraden

$g_1: y = m_1 \cdot x + t_1$ und $g_2: y = m_2 \cdot x + t_2$

parallele Geraden	$g_1 \parallel g_2$	$m_1 = m_2$
orthogonale Geraden	$g_1 \perp g_2$	$m_1 \cdot m_2 = -1$

Beispiele:

a) $g_1: y = 0{,}2 \cdot x + 4$ und $g_2: y = \frac{1}{5} \cdot x + 7$ $\quad m_1 = m_2 = 0{,}2 \quad \Rightarrow g_1 \parallel g_2$

b) $g_1: y = 3 \cdot x + 4$ und $g_2: y = -\frac{1}{3} \cdot x + 7$ $\quad m_1 \cdot m_2 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \quad \Rightarrow g_1 \perp g_2$

2 Aufstellen von Geradengleichungen

Beispiel: Gegeben ist die Gerade $g = PQ$ mit $P(-3|2)$ und $Q(5|6)$.

$$m = \frac{6-2}{5-(-3)} = \frac{4}{8} = 0{,}5$$

Einsetzen der Koordinaten von Q in $y = 0{,}5 \cdot x + t$ liefert: $6 = 0{,}5 \cdot 5 + t$, also $t = 3{,}5$.

$\Rightarrow g\colon y = 0{,}5 \cdot x + 3{,}5$

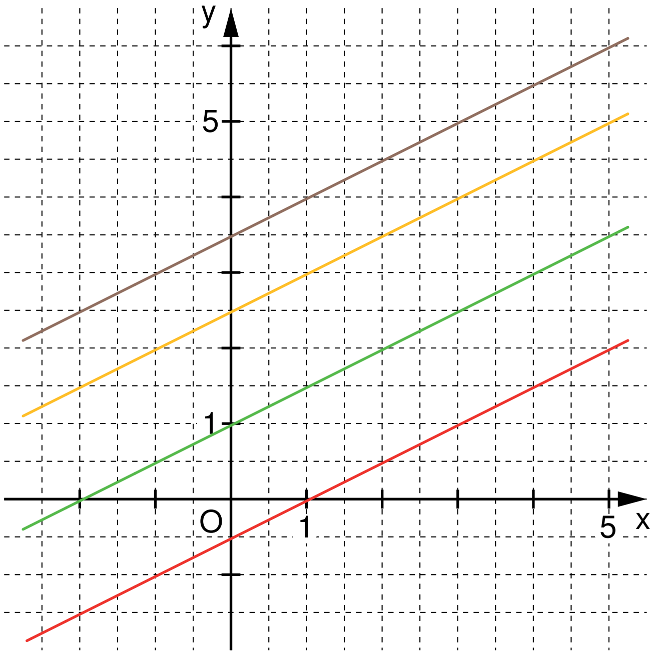
3 Spezielle Geraden

Graph	Besonderheit	Gleichung
Ursprungsgeraden	$t = 0$	$y = m \cdot x$
Parallelen zur x-Achse durch den Punkt $S_y(0\|t)$	$m = 0$	$y = t$
Parallelen zur y-Achse durch den Punkt $S_x(x_0\|0)$	keine Funktion	$x = x_0$

4 Parallelenscharen

Gehören Geraden einer Parallelenschar $g(t)$ an, so haben sie die gleiche Steigung. Sie unterscheiden sich nur im y–Achsenabschnitt t.

Beispiele für Geraden der Parallelenschar $g(t)$: $y = 0{,}5 \cdot x + t$ $(t, x, y \in \mathbb{Q})$:



$g(3{,}5)$: $y = 0{,}5 \cdot x + 3{,}5$

$g(2{,}5)$: $y = 0{,}5 \cdot x + 2{,}5$

$g(1)$: $y = 0{,}5 \cdot x + 1$

$g(-0{,}5)$: $y = 0{,}5 \cdot x - 0{,}5$

Systeme linearer Gleichungen

1 Definition

Zwei durch $\wedge$ („und zugleich“) miteinander verknüpfte lineare Gleichungen mit zwei Variablen bilden ein lineares Gleichungssystem.

Beispiele $(x,y \in \mathbb{R})$:

$$\begin{vmatrix} & y = 2x - 1 \\ \wedge & y = -0{,}5x + 2{,}75 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} & 2x + 3y = 4 \\ \wedge & x - 5y = 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} & y = 0{,}5x + 4 \\ \wedge & -2x + 3y = 0{,}7 \end{vmatrix}$$

2 Lösen von Systemen linearer Gleichungen

2.1 Graphische Lösung

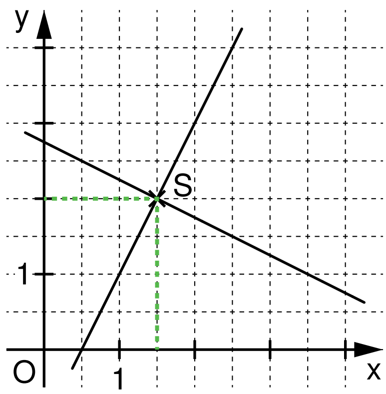
$$\begin{vmatrix} & y = 2x - 1 \\ \wedge & y = -0{,}5x + 2{,}75 \end{vmatrix}$$

Lineare Gleichungen als Gleichungen linearer Funktionen mit Geraden als Graphen

Bestimmen der Lösungsmenge für $x,y \in \mathbb{R}$ durch **Ablesen des Schnittpunktes** S:

$S(1{,}5 \mid 2)$

$\Rightarrow L = \{(1{,}5 \mid 2)\}$



2.2 Algebraische (rechnerische) Lösung

Gleichsetzungsverfahren

Voraussetzung: Beide Gleichungen sind nach der gleichen Variablen aufgelöst.

$$\begin{array}{|l} \boxed{y =} -0{,}5x + 2{,}75 \\ \wedge\ \boxed{y =}\ 2x - 1 \\ \hline \end{array}$$

Gleichsetzen der Rechtsterme und Lösen der entstehenden Gleichung:

$$\begin{array}{rrl} & 2x - 1 = -0{,}5x + 2{,}75 & \mid +1 + 0{,}5x \\ \Leftrightarrow & 2{,}5x = 3{,}75 & \mid :2{,}5 \\ \Leftrightarrow & x = 1{,}5 & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{|l} x = 1{,}5 \\ \wedge\ y = 2 \cdot 1{,}5 - 1 \\ \hline \end{array}$$

Berechnen der zweiten Variablen durch Einsetzen von $x = 1{,}5$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{|l} x = 1{,}5 \\ \wedge\ y = 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow L = \{(1{,}5 \mid 2)\}$$

Einsetzungsverfahren

Voraussetzung: Eine Gleichung ist nach einer Variablen aufgelöst.

$$\begin{array}{|l} \boxed{y =}\ 2x - 1 \\ \wedge\ x + 2y = 5{,}5 \\ \hline \end{array}$$

Einsetzen des Terms $2x - 1$ für y und Lösen der entstehenden Gleichung:

$$\begin{array}{rrl} & x + 2 \cdot (2x - 1) = 5{,}5 & \\ \Leftrightarrow & x + 4x - 2 = 5{,}5 & \\ \Leftrightarrow & 5x - 2 = 5{,}5 & \mid +2 \\ \Leftrightarrow & 5x = 7{,}5 & \mid :5 \\ \Leftrightarrow & x = 1{,}5 & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{|l} x = 1{,}5 \\ \wedge\ y = 2 \cdot 1{,}5 - 1 \\ \hline \end{array}$$

Berechnen der zweiten Variablen durch Einsetzen von $x = 1{,}5$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{|l} x = 1{,}5 \\ \wedge\ y = 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow L = \{(1{,}5 \mid 2)\}$$

Additionsverfahren

Voraussetzung: In den linearen Gleichungen unterscheiden sich die Koeffizienten einer Variablen nur durch das Vorzeichen.

$$\left| \begin{array}{rr} 4x \boxed{-2y} = & 2 \\ \wedge\ x \boxed{+2y} = & 5{,}5 \end{array} \right.$$

Jeweils Addieren der Links- bzw. Rechtsterme und Lösen der entstehenden Gleichung:

$$\begin{aligned} & 4x-2y+(x+2y)=2+5{,}5 \\ \Leftrightarrow\ & 4x-2y+x+2y=7{,}5 \\ \Leftrightarrow\ & 5x=7{,}5 \quad \left|:5\right. \\ \Leftrightarrow\ & x=1{,}5 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} x=1{,}5 \\ \wedge\ 1{,}5+2y=5{,}5 \end{array} \right.$$

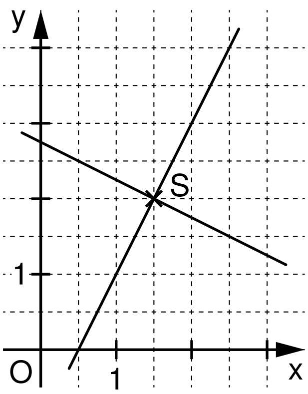
Berechnen der zweiten Variablen durch Einsetzen von $x = 1{,}5$:

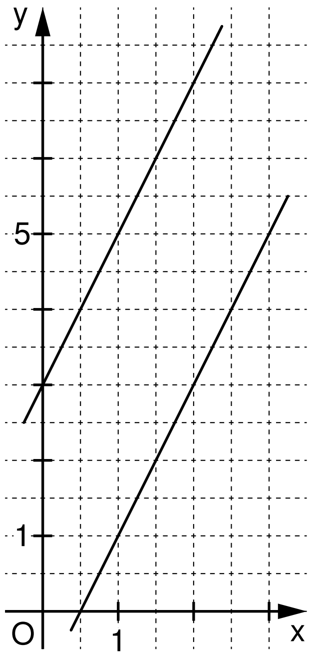
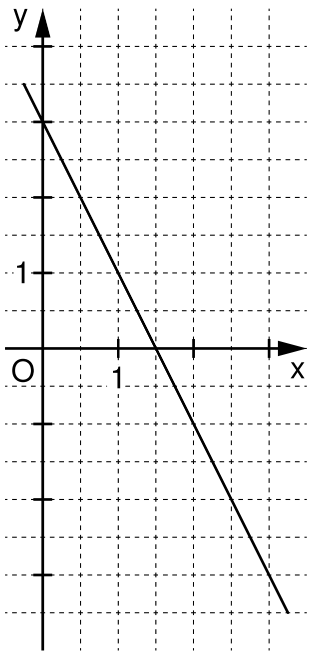
$$\begin{aligned} & 1{,}5+2y=5{,}5 \quad \left|-1{,}5\right. \\ \Leftrightarrow\ & 2y=4 \quad \left|:2\right. \\ \Leftrightarrow\ & y=2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x=1{,}5 \\ \wedge\ y=2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow L=\{(1{,}5\,|\,2)\}$$

2.3 Mögliche Lösungsmengen

Lösungsmenge	graphische Deutung	Beispiel
Es gibt <u>genau eine Belegung</u> für die Variablen x und y, so dass beide Gleichungen gelöst werden können. $L=\{(x_S\,|\,y_S)\}$	 Die Geraden schneiden sich im Punkt $S(x_S\|y_S)$.	$\left\| \begin{array}{l} y=2x-1 \\ \wedge\ y=-0{,}5x+2{,}75 \end{array} \right.$ $L=\{(1{,}5\,\|\,2)\}$

Es gibt keine Belegung für die Variablen x und y, so dass beide Gleichungen gelöst werden können. $L = \{\ \}$	 Die Geraden liegen parallel zueinander.	$\begin{array}{\|l} \quad y = 2x - 1 \\ \wedge \quad y = 2x + 3 \\ \hline \end{array}$ $L = \{\ \}$
Es gibt unendlich viele Belegungen für die Variablen x und y, so dass beide Gleichungen gelöst werden können. $L = \{(x\|y) \mid ax + by = c\}$	 Die Geraden sind identisch.	$\begin{array}{\|r} 6x + 3y = 9 \\ \wedge \quad 2x + y = 3 \\ \hline \end{array}$ $L = \{(x\|y) \mid 6x + 3y = 9\}$

Daten und Zufall

1 Das empirische Gesetz der großen Zahlen

Bei einem Zufallsexperiment kann die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis näherungsweise bestimmt werden, indem das Zufallsexperiment unter denselben Bedingungen mit einer genügend großen Anzahl an Wiederholungen durchgeführt wird.

Beispiel: Ein Spielwürfel wird 20-mal geworfen. Dabei erhält man viermal die Augenzahl 3.

Relative Häufigkeit: $\frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 20\%$

Dabei nähert sich der gemessene Wert für die relative Häufigkeit immer mehr dem theoretisch ermittelten Wert für die Wahrscheinlichkeit an, je größer die Anzahl der Wiederholungen wird.

Beispiele:

a) Ein Spielwürfel wird 10 000-mal geworfen.
Dabei erhält man 1641-mal die Augenzahl 3.

Relative Häufigkeit: $\frac{1641}{10000} = 16{,}41\%$

Theoretisch ermittelte Wahrscheinlichkeit P für das Werfen der Augenzahl 3: $P(3) = \frac{1}{6} = 16{,}\overline{6}\ \%$ (einer von sechs Fällen)

b) Ein Reißnagel wird 10 000-mal geworfen.
Dabei landet er 6238-mal auf der Seite.

Relative Häufigkeit: $\frac{6238}{10000} = 62{,}38\ \%$

Als Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit P kann man die relative Häufigkeit annehmen.

2 Begriffe

Jeden möglichen Ausgang bei der Durchführung eines Zufallsexperiments nennt man **Ergebnis**. Die Menge aller möglichen Ergebnisse heißt **Ergebnisraum** Ω.	Beispiel: Werfen eines Spielwürfels Ergebnisse: Würfeln einer 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 Ergebnisraum: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Ein oder mehrere Elemente des Ergebnisraums bilden ein **Ereignis**. Die restlichen Ergebnisse gehören zum zugehörigen **Gegenereignis**.	„Die Augenzahl ist gerade.“ $\Rightarrow \{2; 4; 6\}$ „Die Augenzahl ist ungerade.“ $\Rightarrow \{1; 3; 5\}$ Die Elemente eines Ereignisses und des zugehörigen Gegenereignisses bilden zusammen den Ergebnisraum!

3 Laplace-Experiment

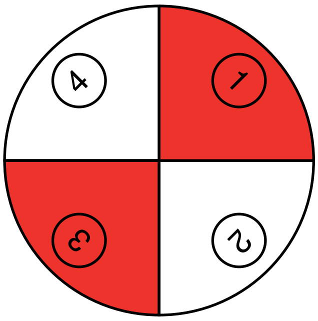
Ein **Laplace-Experiment** ist ein Zufallsexperiment, bei dem alle möglichen Ergebnisse dieselbe Wahrscheinlichkeit haben.

Die Wahrscheinlichkeit P für ein bestimmtes Ereignis berechnet sich dann wie folgt:

$$P = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}.$$

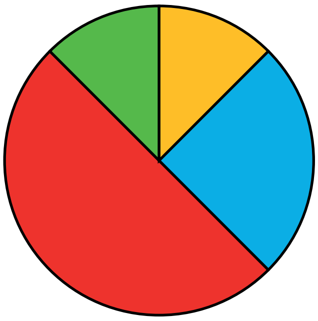
Beispiele: a) Laplace-Experimente:

- Werfen eines gewöhnlichen Spielwürfels
- Werfen einer Münze
- Drehen an einem Glücksrad mit gleich großen, unterscheidbaren Feldern

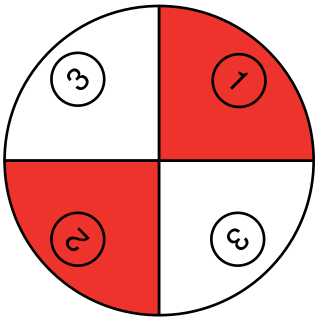


b) Keine Laplace-Experimente:

- In einer Urne befinden sich fünf rote und drei grüne Kugeln. Es wird eine Kugel gezogen.
  → Es ist wahrscheinlicher, eine rote Kugel zu ziehen!
- Das abgebildete Glücksrad wird gedreht:
  → Es ist wahrscheinlicher, das rote Feld zu treffen als die anderen!



- Das abgebildete Glücksrad wird gedreht:
  → Es ist wahrscheinlicher, ein weißes Feld mit 3 zu treffen als die anderen!



4 Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei bekannten Anteilen

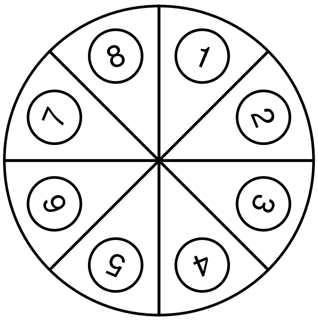
Beispiele: a) In einer Lostrommel sind 500 Lose. Die Hälfte der Lose sind Nieten. 20 % des Restes sind Gewinne, die restlichen Lose sind Trostpreise.

$\Rightarrow$ 250 von 500 Losen sind Nieten.
20 % von 250 sind 50, also sind 50 von 500 Losen Gewinne.
200 von 500 Losen sind Trostpreise

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das erste gezogene Los

- ein Gewinn? $P(\text{Gewinn}) = \frac{50}{500} = 0{,}1 = 10\,\%$
- eine Niete? $P(\text{Niete}) = \frac{250}{500} = 0{,}5 = 50\,\%$
- ein Trostpreis? $P(\text{Trostpreis}) = \frac{200}{500} = 0{,}4 = 40\,\%$
- keine Niete? $P(\text{keine Niete}) = \frac{50+200}{500} = 0{,}5 = 50\,\%$

b) An dem Glücksrad wird gedreht.



Wie groß ist beim einmaligen Drehen die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis

- „Man erhält die 7“?
  $P(7) = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\,\%$ (eine von acht Möglichkeiten)
- „Man erhält eine gerade Zahl“?
  $P(\text{gerade Zahl}) = \frac{4}{8} = 0{,}5 = 50\,\%$ (vier von acht Möglichkeiten)
- „Man erhält eine Primzahl“?
  $P(\text{Primzahl}) = \frac{4}{8} = 0{,}5 = 50\,\%$ (vier von acht Möglichkeiten)
- „Man erhält entweder die 2 oder die 5“?
  $P(2 \text{ oder } 5) = \frac{2}{8} = 0{,}25 = 25\,\%$ (zwei von acht Möglichkeiten)