Grundlegende Inhalte Mathematik, Realschule, Jahrgangsstufe 6

Inhaltsverzeichnis

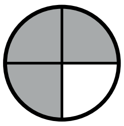
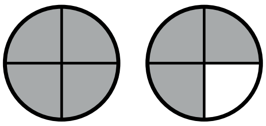
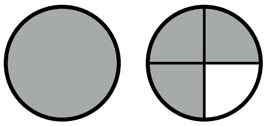
Stand: 01.07.2019

Rationale Zahlen

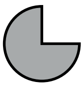
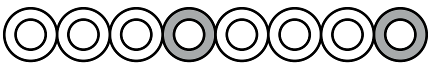
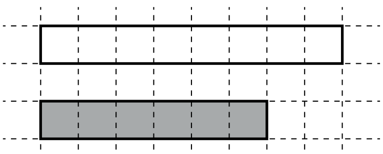
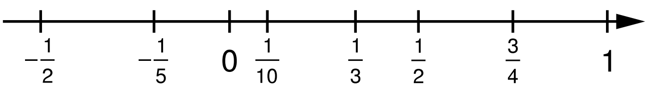
1 Begriffe

$\frac{5}{8} \leftarrow \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$

Der Nenner gibt an, in wie viele gleich große Teile das Ganze zerlegt wird.
Der Zähler gibt an, wie viele dieser gleich großen Teile genommen werden.

echter Bruch	**unechter Bruch**	**gemischter Bruch**
$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{4}$	$1\frac{3}{4}$
Zähler ist kleiner als Nenner	Zähler ist größer als Nenner	ganze Zahl und Bruchteil
		

2 Grundvorstellungen

$\frac{3}{4}$ von einem Ganzen	
$\frac{1}{3}$ von zwei Stunden	$\frac{1}{3} \cdot 120\text{ min} = 40\text{ min}$
Drei Pizzen sollen gerecht auf vier Personen aufgeteilt werden.	$3:4=\frac{3}{4}$
$\frac{1}{4}$ als jeder Vierte	
$\frac{3}{5}$ als 3 von 5	
$\frac{3}{4}$ mal so lang	
Bruchzahlen an der Zahlengeraden	

3 Formveränderung von Brüchen

Erweitern heißt Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben Zahl multiplizieren.

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$$

Kürzen heißt Zähler und Nenner eines Bruches durch dieselbe Zahl dividieren.

$$\frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c}$$

Beachte: Man darf mit 0 weder erweitern noch kürzen.

Beispiele: Erweitern: $\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{10}{15}$ Erweiterung mit 5

Kürzen: a) $\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$ b) $\frac{120}{54}=\frac{20}{9}=2\frac{2}{9}$

4 Addition und Subtraktion von Brüchen

Regel:

- Man bestimmt einen gemeinsamen Nenner und macht die Brüche gleichnamig.
- Man addiert bzw. subtrahiert die Zähler.
- Man behält den gemeinsamen Nenner bei.

z. B.: $\frac{3}{4}+\frac{5}{3}-\frac{1}{2}=\frac{9}{12}+\frac{20}{12}-\frac{6}{12}=\frac{9+20-6}{12}=\frac{23}{12}=1\frac{11}{12}$

5 Multiplikation von Brüchen

Regeln: Bruch mal Bruch

- Man multipliziert Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

(Gemischte Zahlen werden vorher in unechte Brüche umgewandelt)

Bruch mal ganze Zahl

- Man verwandelt die ganze Zahl in einen Bruch mit dem Nenner 1 und verfährt nach obiger Regel.

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{1}=\frac{a\cdot c}{b}$$

Beispiele: a) $\frac{5}{4}\cdot 8=\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{1}=\frac{5\cdot 8}{4\cdot 1}=\frac{5\cdot 2}{1\cdot 1}=10$

b) $-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{24}=-\frac{3\cdot 5}{4\cdot 24}=-\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}=-\frac{5}{32}$

c) $8\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{4}=\frac{25}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{25\cdot 3}{1\cdot 4}=\frac{75}{4}=18\frac{3}{4}$

6 Division von Brüchen

Regel:

- Man bildet den Kehrwert des zweiten Bruches und multipliziert anschließend die beiden Brüche.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Beispiele: a) $\frac{4}{11}:\frac{12}{33}=\frac{4}{11}\cdot\frac{33}{12}=\frac{1\cdot 3}{1\cdot 3}=1$

b) $1\frac{6}{7}:\left(-2\frac{1}{3}\right)=\frac{13}{7}:\left(-\frac{7}{3}\right)=\frac{13}{7}\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)=-\frac{39}{49}$

7 Brüche, Dezimalzahlen und Prozent

7.1 Umwandlung von Brüchen in Dezimalzahlen

Stellenwerte der ersten vier Dezimalstellen

zehntel z	hundertstel h	tausendstel t	zehntausendstel zt
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$
0,1	0,01	0,001	0,0001

Regel:

- Brüche mit Stufenzahlen im Nenner können auch als Dezimalzahlen dargestellt werden.

  z. B.: $\frac{2}{10}=0{,}2$ $\quad$ $\frac{3}{100}=0{,}03$ $\quad$ $\frac{23}{100}=0{,}23$

  $\frac{5}{1000}=0{,}005$ $\quad$ $\frac{97}{1000}=0{,}097$ $\quad$ $\frac{404}{10000}=0{,}0404$

- Man wandelt einen Bruch in eine Dezimalzahl um, indem man den **Bruchstrich** durch ein **Divisionszeichen** ersetzt und den Zähler durch den Nenner dividiert **oder** den Nenner auf eine **Stufenzahl** erweitert und entsprechend umformt.

  z. B.: $\frac{7}{8}=7:8=0{,}875$ oder $\frac{7}{8}=\frac{875}{1000}=0{,}875$

  $-\frac{2}{5}=-2:5=-0{,}4$

  bzw. $-\frac{2}{5}=2:(-5)=-0{,}4$ oder $-\frac{2}{5}=-\frac{4}{10}=-0{,}4$

Beispiele: a) $\frac{18}{25}=\frac{72}{100}=0{,}72$ $\quad$ b) $\frac{9}{16}=9:16=0{,}5625$

c) $-\frac{8}{15}=-8:15=-0{,}5333\ldots=-0{,}5\overline{3}$

Wichtige Bruchteile:

$\frac{1}{2}=0{,}5$; $\quad$ $\frac{1}{3}=0{,}\overline{3}$; $\quad$ $\frac{1}{4}=0{,}25$; $\quad$ $\frac{1}{5}=0{,}2$; $\quad$ $\frac{1}{8}=0{,}125$; $\quad$ $\frac{1}{9}=0{,}\overline{1}$; $\quad$ $\frac{1}{10}=0{,}1$

7.2 Bruchteile und das Ganze bestimmen

Bruchteile bestimmen: $\frac{4}{5}$ von 35 kg	
Dreisatz	Multiplikation
$\begin{array}{rcl} & \frac{5}{5} \mathrel{\widehat{=}} 35\,\text{kg} & \\ :5 \downarrow & & \downarrow :5 \\ & \frac{1}{5} \mathrel{\widehat{=}} 7\,\text{kg} & \\ \cdot 4 \downarrow & & \downarrow \cdot 4 \\ & \frac{4}{5} \mathrel{\widehat{=}} 28\,\text{kg} & \end{array}$	$\frac{4}{5} \cdot 35\,\text{kg} = \frac{4 \cdot 35}{5 \cdot 1}\,\text{kg} = 28\,\text{kg}$
Ganzes bestimmen: $\frac{4}{5}$ des Ganzen entsprechen 28 kg	
$\begin{array}{rcl} & \frac{4}{5} \mathrel{\widehat{=}} 28\,\text{kg} & \\ :4 \downarrow & & \downarrow :4 \\ & \frac{1}{5} \mathrel{\widehat{=}} 7\,\text{kg} & \\ \cdot 5 \downarrow & & \downarrow \cdot 5 \\ & \frac{5}{5} \mathrel{\widehat{=}} 35\,\text{kg} & \end{array}$	$\frac{5}{4} \cdot 28\,\text{kg} = \frac{5 \cdot 28}{4 \cdot 1}\,\text{kg} = 35\,\text{kg}$

7.3 Umwandeln von Brüchen in Prozent

Der Begriff Prozent bedeutet „von Hundert“.

$1\% = \frac{1}{100}$ $\qquad$ $25\% = \frac{25}{100}$ $\qquad$ $315\% = \frac{315}{100}$

8 Umwandlung von Dezimalzahlen in Brüche

8.1 Endliche Dezimalzahlen

Regel:
- Im Zähler steht die Zahl aus allen Dezimalen.
- Im Nenner steht die entsprechende Stufenzahl.
- Die Ganzen werden gesondert umgewandelt.

z. B.: $0{,}16 = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$ $\quad 3{,}4 = 3\frac{4}{10} = \frac{34}{10}$ $\quad 2{,}03 = 2\frac{3}{100}$

8.2 Unendlich periodische Dezimalzahlen

Regel:
- Im Zähler steht die Periode.
- Im Nenner steht eine Zahl, die aus so vielen Ziffern 9 besteht wie die Länge der Periode vorgibt.

z. B.: $0{,}\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ $\quad 0{,}\overline{002} = \frac{2}{999}$

(Die Regel gilt nur, wenn die Periode sofort nach dem Komma beginnt!)

9 Runden von Dezimalzahlen

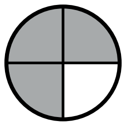
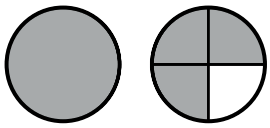
Regel: Für das Runden von Dezimalzahlen gilt Folgendes:

1) Man identifiziert die Stelle, auf die zu runden ist.

2) Die folgende Ziffer ist entscheidend dafür, ob auf- oder abgerundet wird:
   Abrunden:
   Die zu rundende Ziffer bleibt unverändert, wenn eine der Ziffern 0, 1, 2, 3 oder 4 folgt.
   Aufrunden:
   Die zu rundende Ziffer wird um 1 erhöht, wenn eine der Ziffern 5, 6, 7, 8 oder 9 folgt.

z. B.: $123{,}8\,(\mathrm{E}) \approx 124$ $\quad -6{,}983\,(\mathrm{h}) \approx -6{,}98$ $\quad 12{,}057\,(\mathrm{z}) \approx 12{,}1$

10 Darstellungsformen für rationale Zahlen

graphisch	Bruch	Dezimalzahl	Prozent
	$\frac{3}{4}$	0,75	75 %
	$1\frac{3}{4}$	1,75	175 %

11 Rechnen mit Dezimalzahlen

Alle Rechengesetze und Regeln, die für ganze Zahlen gelten, behalten ihre Gültigkeit!

11.1 Addition und Subtraktion von Dezimalzahlen

Regel:

- Man bringt die Dezimalzahl durch Anhängen von Endnullen auf gleich viele Dezimalen.
- Man addiert bzw. subtrahiert Ziffern mit gleichem Stellenwert.

z. B.: $23{,}4+2{,}315-0{,}71=23{,}400+2{,}315-0{,}710=25{,}005$

11.2 Multiplikation von Dezimalzahlen

Regel:

- Man multipliziert die beiden Dezimalzahlen zunächst ohne Komma.
- Man setzt das Komma so, dass das Ergebnis so viele Dezimalen besitzt wie beide Faktoren zusammen.

z. B.: $4{,}5\cdot 0{,}3=1{,}35$ $\quad$ $32\cdot 0{,}024=0{,}768$

$1{,}5\cdot 1000=1500$ $\quad$ $0{,}02\cdot 0{,}3=0{,}006$

11.3 Division von Dezimalzahlen

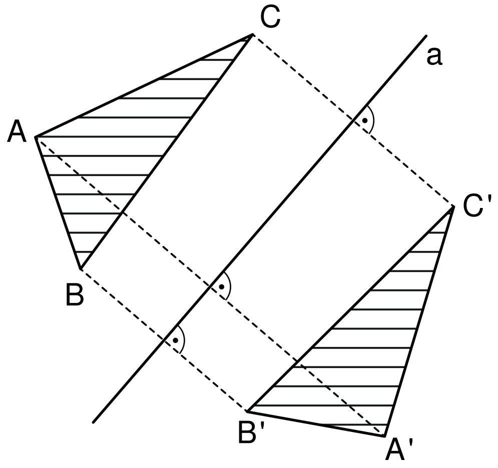
Regel:

- Man verschiebt das Komma bei Dividend und Divisor um gleich viele Stellen so weit nach rechts, bis der Divisor kommafrei ist.
- Man dividiert wie in IN.
- Beim Überschreiten der Kommastelle beim Dividenden setzt man das Komma im Ergebnis.

z. B.: $4{,}97 : 3{,}5 = 49{,}7 : 35 = 1{,}42$

$$
\begin{array}{rrr}
35 & & \\
\hline
14 & 7 & \\
14 & 0 & \\
\hline
 & 7 & 0 \\
 & 7 & 0 \\
\hline
 & & 0
\end{array}
$$

Achsenspiegelung und Symmetrie



Spiegelt man eine Figur an einer Spiegelachse a, so wird jeder Urpunkt A, B, C, ... auf genau einen Bildpunkt $A', B', C', \ldots$ abgebildet.

Die Achsenspiegelung ist umkehrbar.

Kurzschreibweise: $A \xmapsto{a} A'$

Urfigur und Bildfigur liegen **symmetrisch** zur Spiegelachse a.

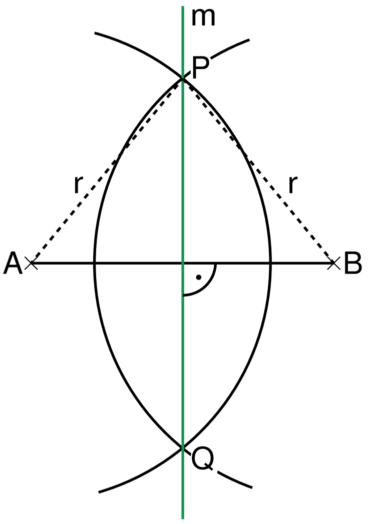
Eigenschaften: $P \xmapsto{a} P'$

- Bei einer Achsenspiegelung schneidet die Verbindungsstrecke von Urpunkt P und Bildpunkt P' die Spiegelachse unter einem **rechten Winkel** und sie wird von der Spiegelachse **halbiert**.
- Bei allen Achsenspiegelungen ist nur die Spiegelachse **Fixpunktgerade**.
- Alle Senkrechten zur Spiegelachse und die Spiegelachse selbst sind **Fixgeraden**.
- Alle Achsenspiegelungen sind **längen-, winkel-, geraden-, kreis- und parallelentreu.**
- Nach einer Achsenspiegelung ist der Umlaufsinn bei Figuren umgekehrt.
- Die Achsenspiegelung ist eine **Kongruenzabbildung.**

1 Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AB}$

- Zeichne um A und B Kreisbögen mit dem gleichen Radius r, wobei gilt: $r > \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}|$.
- Zeichne die Gerade m durch die beiden Schnittpunkte P und Q.

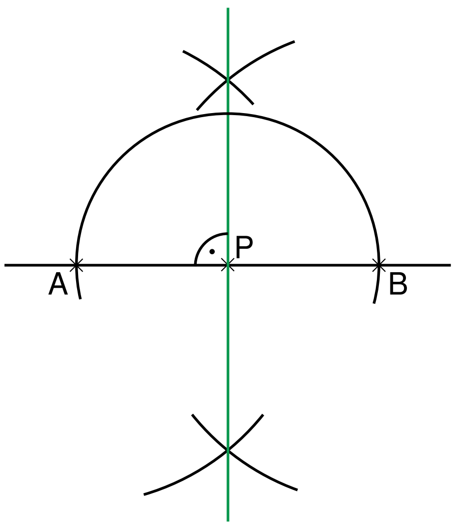
Merke: Alle Punkte der Mittelsenkrechten m zur Strecke $\overline{AB}$ sind von den Punkten A und B gleich weit entfernt. Beispiel: $|\overline{AP}| = |\overline{BP}| = r$.



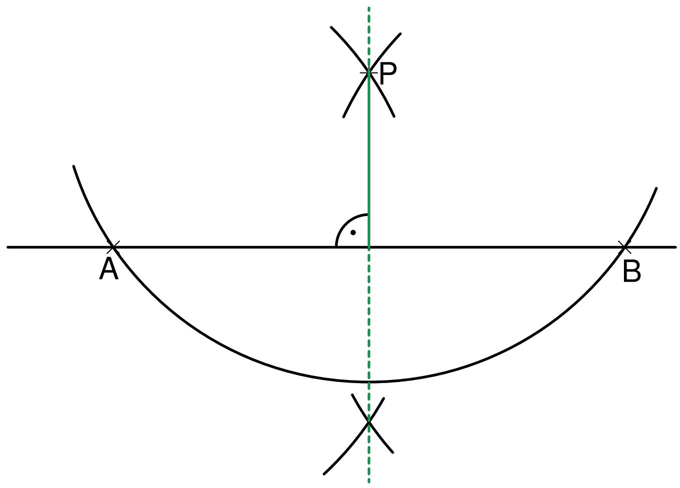
2 Senkrechte bzw. Lot von einem Punkt auf eine Gerade / Strecke

- Zeichne einen Kreisbogen um P, der die Gerade g in zwei Punkten A und B schneidet.
- Mithilfe der Konstruktion einer Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AB}$ kann man eine Senkrechte bzw. ein Lot zeichnen.

Senkrechte

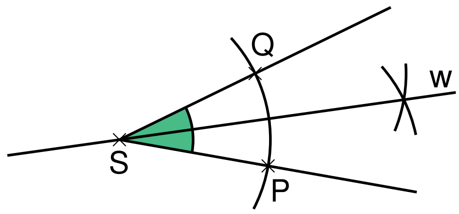


Lot



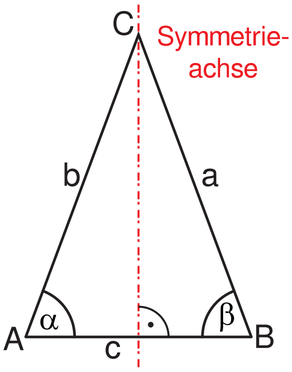
3 Winkelhalbierende

- Zeichne einen Kreisbogen um den Scheitel S des Winkels. Dieser schneidet die Schenkel in den Punkten P und Q.
- Zeichne um P und Q je einen Kreisbogen mit dem gleichen Radius r.
- Zeichne eine Gerade durch den Scheitel S und den Schnittpunkt R dieser Kreisbögen.



4 Achsensymmetrische Dreiecke

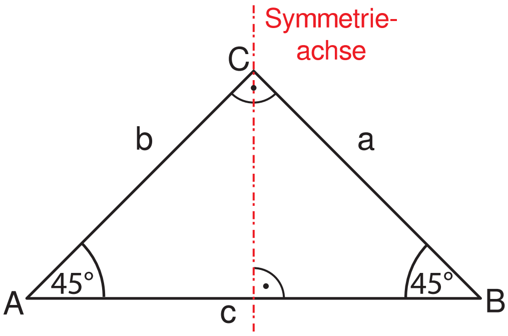
gleichschenkliges Dreieck



$a = b$

$\alpha = \beta$

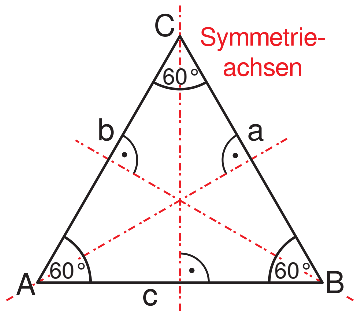
gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck



$a = b$

$\alpha = \beta = 45°$

gleichseitiges Dreieck

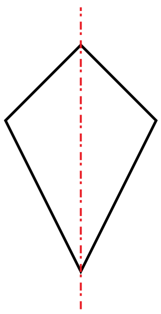


$a = b = c$

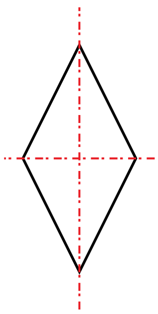
$\alpha = \beta = \gamma = 60°$

5 Achsensymmetrische Vierecke

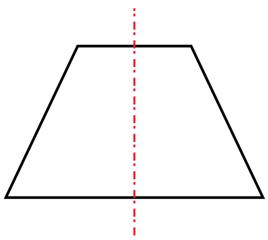
Drachenviereck



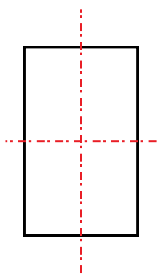
Raute



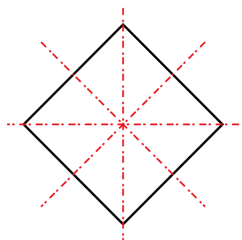
Gleichschenkliges Trapez



Rechteck



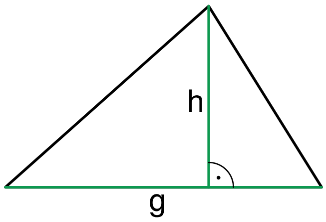
Quadrat



Flächeninhalt ebener Figuren

1 Flächeninhalt von Dreiecken

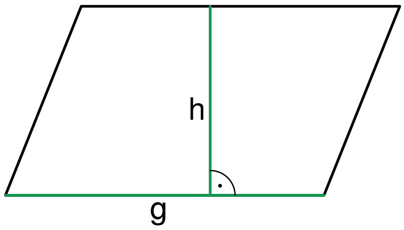
Allgemeines Dreieck



$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

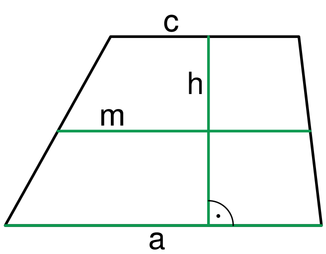
2 Flächeninhalt von Vierecken

Parallelogramm



$$A = g \cdot h$$

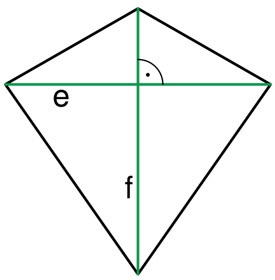
Trapez



$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$

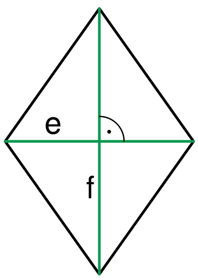
$$m = \frac{1}{2} \cdot (a + c)$$

Drachenviereck



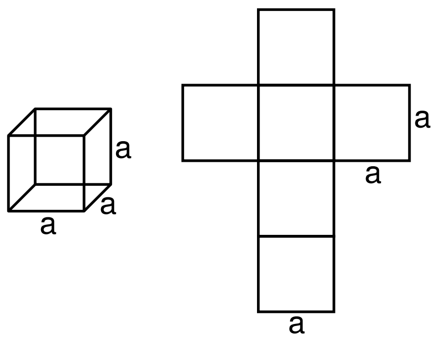
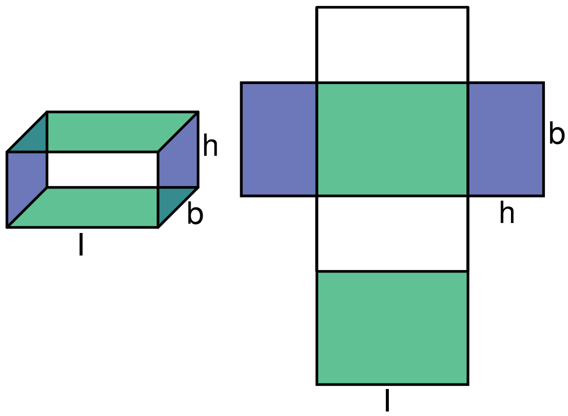
$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

Raute



$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

3 Oberflächeninhalt von Würfel und Quader

Würfel	Quader
 $O = 6 \cdot a \cdot a = 6 \cdot a^2$	 $O = 2 \cdot l \cdot b + 2 \cdot l \cdot h + 2 \cdot b \cdot h$ $= 2 \cdot (l \cdot b + l \cdot h + b \cdot h)$

Raumgeometrie

1 Maßeinheiten

Rauminhalt	**Umwandlungszahl 1000**
1 m^3 = 1000 dm^3	m^3 : Kubikmeter
1 dm^3 = 1000 cm^3	dm^3 : Kubikdezimeter
1 cm^3 = 1000 mm^3	cm^3 : Kubikzentimeter
1 mm^3	mm^3 : Kubikmillimeter

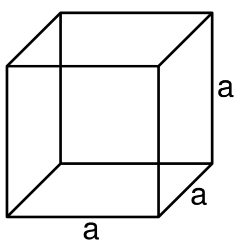
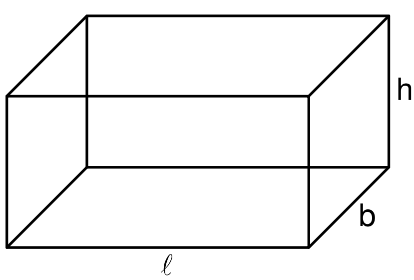
Umwandlungen von Raummaßen und Hohlmaßen

1 ℓ = 1 dm^3 **1 mℓ = 1 cm^3**

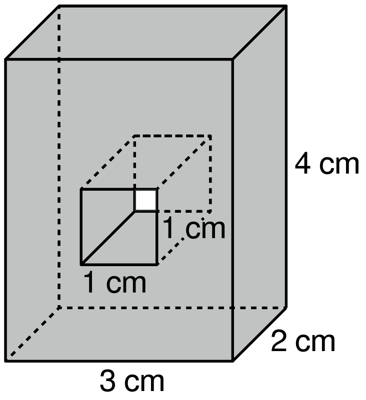
Beispiele:		
	13 cm^3 = 13 000 mm^3	2,05 m^3 = 2050 dm^3
	35 000 cm^3 = 35 dm^3	35 dm^3 = 35 ℓ
	200 dℓ = 20 ℓ = 20 dm^3	3,5 m^3 = 3500 dm^3 = 3500 ℓ = 35 hℓ

2 Rauminhalte

2.1 Würfel und Quader

Würfel	**Quader**
	
$V = a \cdot a \cdot a = a^3$	$V = \ell \cdot b \cdot h$

2.2 Zerlegbare Körper



$V = (3 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 1)\ \text{cm}^3 = 22\ \text{cm}^3$

$O = 2 \cdot (3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4)\ \text{cm}^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1\ \text{cm}^2 + 4 \cdot 1 \cdot 2\ \text{cm}^2 = 58\ \text{cm}^2$

Terme und Gleichungen

1 Terme

Jede Zahl,	z. B.: 5; 0,12; $-3\frac{5}{7}$; ...
jede Variable	z. B.: a; x; y; ...
und alle sinnvollen Verknüpfungen aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen bezeichnet man als **Term.**	z. B.: $5+0{,}3\cdot 2{,}4$; $3\cdot x-7$; x^2-25 ; ...

In einem Term muss für jede Variable eine Grundmenge G angegeben sein.

2 Darstellungsarten von Termen

Wenn man für die Variable des Terms Zahlen der Grundmenge einsetzt, erhält man jeweils den zugehörigen Termwert.

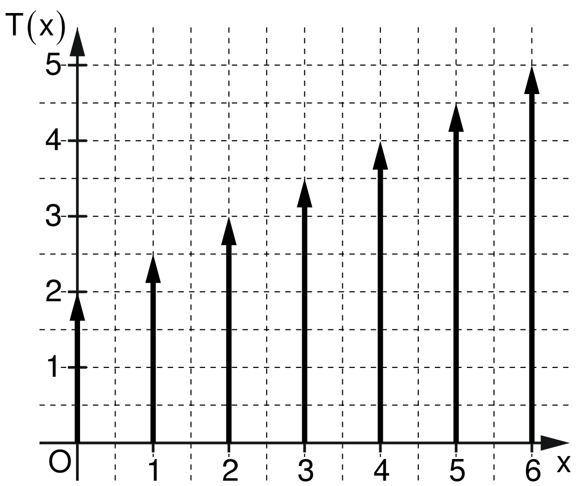
Terme kann man in numerischen und graphischen Wertetabellen sowie einem Text oder Skizze darstellen.

Beispiel: $T(x)=0{,}5\cdot x+2$ $G=\{0;1;2;3;4;5;6\}$

2.1 Numerische Wertetabelle

x	0	1	2	3	4	5	6
$0{,}5\cdot x+2$	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5

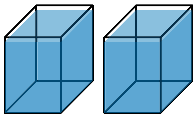
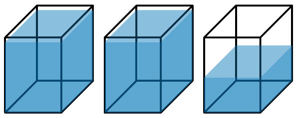
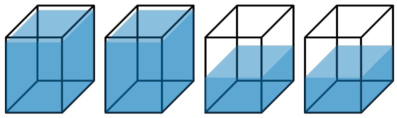
2.2 Graphische Wertetabelle



2.3 Text

Neben zwei vollen 1-Liter-Gefäßen stehen halbvolle Gefäße. Die gesamte Flüssigkeitsmenge wird in Abhängigkeit von der Anzahl x der halbvollen Gefäße bestimmt.

2.4 Skizze

Anzahl halb voller Gefäße	0	1	2
Gefäße			
Flüssigkeits-menge in Liter	2	2,5	3

3 Äquivalente Terme

Terme sind **äquivalent** (gleichwertig), wenn sie bei **allen Einsetzungen aus der Grundmenge G jeweils die gleichen Termwerte haben**.

Beispiele:

1) $T_1(x) = 20 + 4 \cdot x$ und $T_2(x) = (5 + x) \cdot 4$; $G = \{1; 2; 3\}$

für x = 1: $T_1(1) = 24$ $T_2(1) = 24$

für x = 2: $T_1(2) = 28$ $T_2(2) = 28$

für x = 3: $T_1(3) = 32$ $T_2(3) = 32$

Da die Termwerte für alle Einsetzungen gleich sind, sind die Terme bezüglich der Grundmenge äquivalent: $T_1(x) = T_2(x)$.

2) $T_1(x) = x \cdot x$ und $T_2(x) = 2 \cdot x$; $G = \{0; 1; 2\}$

für x = 0: $T_1(0) = 0$ $T_2(0) = 0$

für x = 1: $T_1(1) = 1$ $T_2(1) = 2$

für x = 2: $T_1(2) = 4$ $T_2(2) = 4$

Da die Termwerte nicht für alle Einsetzungen gleich sind, sind die Terme bezüglich der Grundmenge nicht äquivalent $T_1(x) \neq T_2(x)$.

4 Einfache Termumformungen mithilfe der Rechengesetze und -regeln

Bei Zahlentermen finden die Rechenregeln und –gesetze Anwendung.

Beispiele:

1) $T(x) = 3 \cdot 9 + 3 \cdot x - 5 \cdot (8-3)$
$= 27 + 3 \cdot x - 5 \cdot 5$
$= 27 + 3 \cdot x - 25$
$= 3 \cdot x + 2$

2) $T(a) = \left[(-5+4) - 2 \cdot 3^2\right] \cdot a - 48 : 6$
$= \left[-1 - 2 \cdot 9\right] \cdot a - 8$
$= \left[-1 - 18\right] \cdot a - 8$
$= -19 \cdot a - 8$

5 Äquivalenz von Gleichungen

Gleichungen, die bei **gleicher Grundmenge dieselbe Lösungsmenge** besitzen, heißen **äquivalent**.

Beispiel: $(5+x) \cdot 4 = 80$ ist äquivalent zu $20 + 4 \cdot x = 80$ in $G = \mathbb{Q}_0^+$,
da beide Gleichungen die Lösungsmenge $L = \{15\}$ haben.

6 Äquivalenzumformungen

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert
- beide Seiten mit der gleichen von Null verschiedenen Zahl multipliziert oder dividiert.

Eine derartige Umformung heißt **Äquivalenzumformung**.

Beispiele: $G = \mathbb{Z}$

1) $x + 8 = 5 \quad | -8$
$\Leftrightarrow \quad x = -3 \qquad L = \{-3\}$

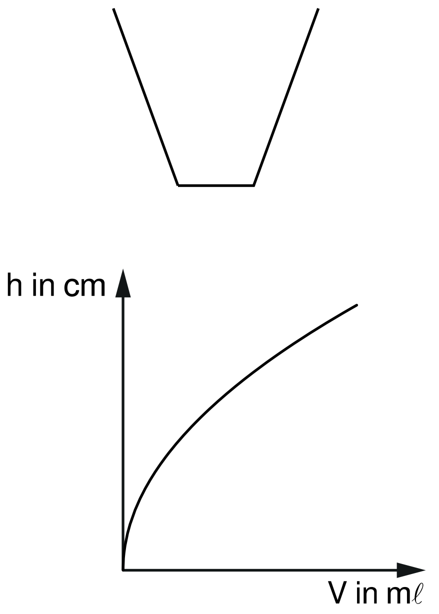
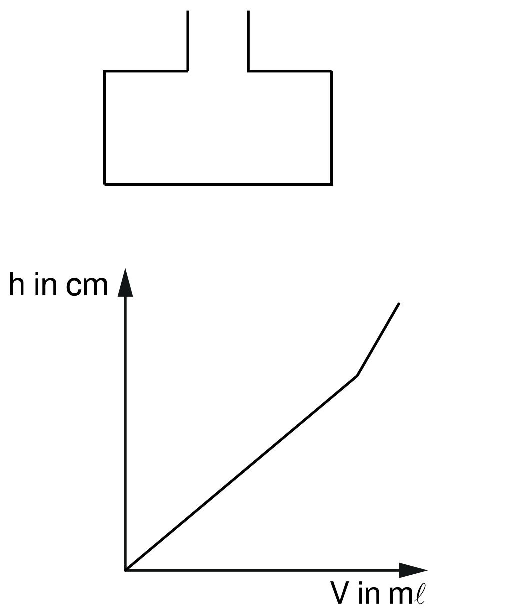
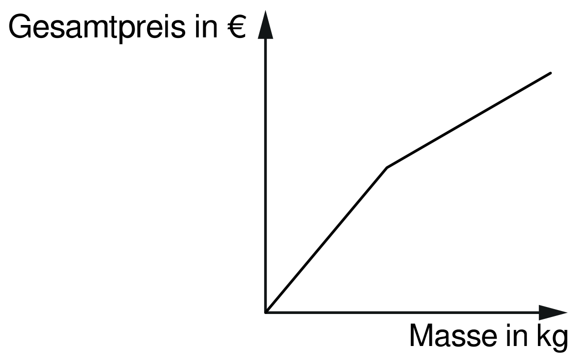
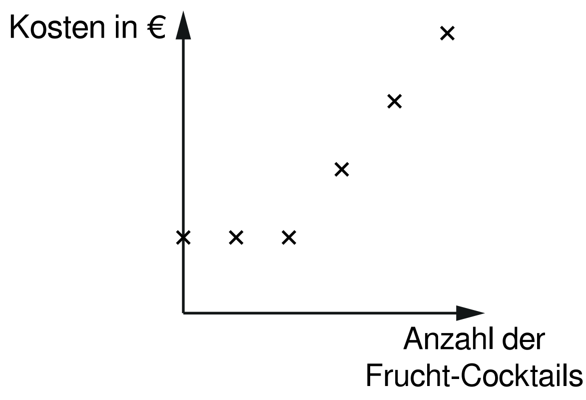
2) $-\frac{1}{3} \cdot x = 7{,}5 \quad | \cdot(-3)$
$\Leftrightarrow \quad x = -22{,}5 \qquad L = \{\ \}$

Zur Probe setzt man die Lösung ein und überzeugt sich, dass eine wahre Aussage entsteht.

$-3 + 8 = -5$ (wahre Aussage)

Direkte Proportionalität

1 Zuordnungen

<table>
<tr><td colspan="2">Wasser wird gleichmäßig in die Behälter gefüllt. Die Füllhöhe h ist abhängig von der eingefüllten Menge V und wird graphisch dargestellt.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ab dem Einkauf einer bestimmten Masse an Äpfeln wird der Preis pro Kilogramm reduziert.</td><td>Bei einer Veranstaltung sind die ersten beiden Frucht-Cocktails im Eintritt enthalten.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

2 Direkte Proportionalität

Entspricht bei einer Zuordnung von Größen das n-fache der einen Größe dem n-fachen der anderen Größe, so heißt diese Zuordnung **direkte Proportionalität**.

Beispiel: Wurstaufschnitt W in g → Preis P in €

$\cdot 10$

$\cdot 2$ $\quad \cdot 2{,}5$ $\quad : 2$

W in g	50	100	200	250	500
P in €	0,60	1,20	2,40	3,00	6,00

$\cdot 2$ $\quad \cdot 2{,}5$ $\quad : 2$

$\cdot 10$

Eigenschaften:

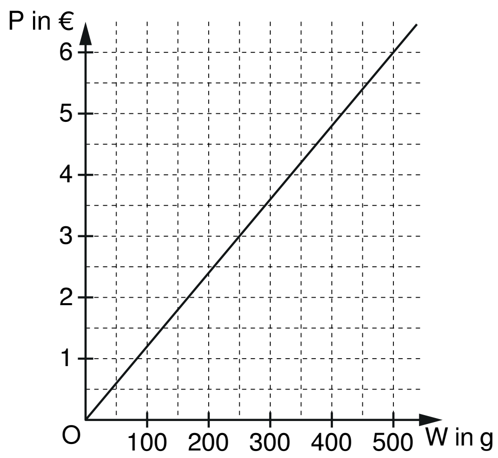
- Alle Größenpaare (W|P) einer direkten Proportionalität sind **verhältnis**- bzw. **quotientengleich**.
- Der konstante Quotient $k = \frac{P}{W}$ heißt **Proportionalitätsfaktor**.

Beispiel:

W in g	50	100	200	250	500
P in €	0,60	1,20	2,40	3,00	6,00
$k = \frac{P}{W}$ in $\frac{€}{g}$	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012

Man sagt: „Die beiden Größen W und P sind zueinander direkt proportional“ ($P \sim W$).

- Die graphische Darstellung einer direkten Proportionalität ist eine Ursprungshalbgerade.



Beispiel: Berechnung fehlender Werte

Lösung mit einer Verhältnisgleichung	Lösung mit Dreisatz
$\begin{array}{c\|c} 100 & 275 \\ \hline 1{,}2 & y \end{array}$ $\frac{y}{1{,}2} = \frac{275}{100}$ $y = \frac{275 \cdot 1{,}2}{100} = 3{,}3$ 275 g Wurst kosten 3,30 €.	$\begin{array}{ccc} & 100\text{ g} \mathrel{\widehat{=}} 1{,}20\text{ €} & \\ :100 \downarrow & & \downarrow :100 \\ & 1\text{ g} \mathrel{\widehat{=}} 0{,}012\text{ €} & \\ \cdot 275 \downarrow & & \downarrow \cdot 275 \\ & 275\text{ g} \mathrel{\widehat{=}} 3{,}30\text{ €} & \end{array}$ 275 g Wurst kosten 3,30 €.

3 Prozentrechnung

Bruchteile gibt man oft in **Prozent** („**von Hundert**“) an. Dabei gilt:

$$\frac{1}{100} = 0{,}01 = 1\,\% \qquad \frac{p}{100} = p\,\%$$

Beispiele:

a) $\frac{19}{100} = 0{,}19 = 19\,\%$

b) $\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 0{,}5 = 50\,\%$

c) $\frac{2}{5} = \frac{40}{100} = 0{,}4 = 40\,\%$

d) $\frac{6}{200} = \frac{3}{100} = 0{,}03 = 3\,\%$

e) $\frac{36}{1000} = 0{,}036 = 3{,}6\,\%$

3.1 Begriffe der Prozentrechnung

Von **135 Schülerinnen** erhielten **60** %, also **81 Schülerinnen** Urkunden.

135 Schülerinnen → **Grundwert (GW)**

60 → **Prozentsatz (p)**

81 Schülerinnen → **Prozentwert (PW)**

3.2 Berechnungen

Die **Zahlen- bzw. Größenpaare** bei der Prozentrechnung sind **quotientengleich**. Es gilt:

$$\frac{\text{Prozentsatz p}}{100}=\frac{\text{Prozentwert PW}}{\text{Grundwert GW}}$$

Berechnung des Prozentwertes

Wie viele Schüler einer Realschule mit 380 Schülern waren bei den Bundesjugendspielen besonders erfolgreich, wenn 15 % eine Ehrenurkunde erhielten?

<table>
<tr><th>Lösung mit einer Verhältnisgleichung</th><th>Lösung mit Dreisatz</th></tr>
<tr><td>

$$\begin{array}{c|c} 15 & \text{PW} \\ \hline 100 & 380 \end{array}$$

$$\frac{15}{100}=\frac{\text{PW}}{380}$$

$$\text{PW}=\frac{15}{100}\cdot 380=57$$

57 Schüler der Realschule haben eine Ehrenurkunde erhalten.

</td><td>

$$\begin{array}{rcl} & 100\,\% \mathrel{\hat{=}} 380 & \\ :100 & & :100 \\ & 1\,\% \mathrel{\hat{=}} 3{,}8 & \\ \cdot 275 & & \cdot 275 \\ & 15\,\% \mathrel{\hat{=}} 57 & \end{array}$$

57 Schüler der Realschule haben eine Ehrenurkunde erhalten.

</td></tr>
</table>

Berechnung des Prozentsatzes

Im benachbarten Gymnasium mit 650 Schülern wurden 260 Siegerurkunden überreicht. Wie viel Prozent der Schüler waren das?

<table>
<tr><th>Lösung mit einer Verhältnisgleichung</th><th>Lösung mit Dreisatz</th></tr>
<tr><td>

$$\begin{array}{c|c} \text{p} & 260 \\ \hline 100 & 650 \end{array}$$

$$\frac{\text{p}}{100}=\frac{260}{650}$$

$$\text{p}=\frac{260}{650}\cdot 100=40$$

40 % aller Schüler haben eine Siegerurkunde erhalten.

</td><td>

$$\begin{array}{rcl} & 100\,\% \mathrel{\hat{=}} 650 & \\ :650 & \frac{100}{650}\,\% = \frac{2}{13}\,\% \mathrel{\hat{=}} 1 & :650 \\ \cdot 260 & & \cdot 260 \\ & 40\,\% \mathrel{\hat{=}} 260 & \end{array}$$

40 % aller Schüler haben eine Siegerurkunde erhalten.

</td></tr>
</table>

Berechnung des Grundwertes

117 Schüler, das sind 22,5 %, haben eine Auszeichnung erhalten. Wie viele Schüler hat die Realschule?

<table>
<tr><th>Lösung mit einer Verhältnisgleichung</th><th>Lösung mit Dreisatz</th></tr>
<tr><td>

$$\begin{array}{c|c} 22{,}5 & 117 \\ \hline 100 & GW \end{array}$$

$$\frac{GW}{117} = \frac{100}{22{,}5}$$

$$GW = \frac{100}{22{,}5} \cdot 117 = 520$$

Die Realschule wird von 520 Schülern besucht.

</td><td>

$$\begin{array}{rcl} & 22{,}5\,\% \mathrel{\hat{=}} 117 & \\ :22{,}5 \downarrow & & \downarrow :22{,}5 \\ & 1\,\% \mathrel{\hat{=}} 5{,}2 & \\ \cdot 100 \downarrow & & \downarrow \cdot 100 \\ & 100\,\% \mathrel{\hat{=}} 520 & \end{array}$$

Die Realschule wird von 520 Schülern besucht.

</td></tr>
</table>